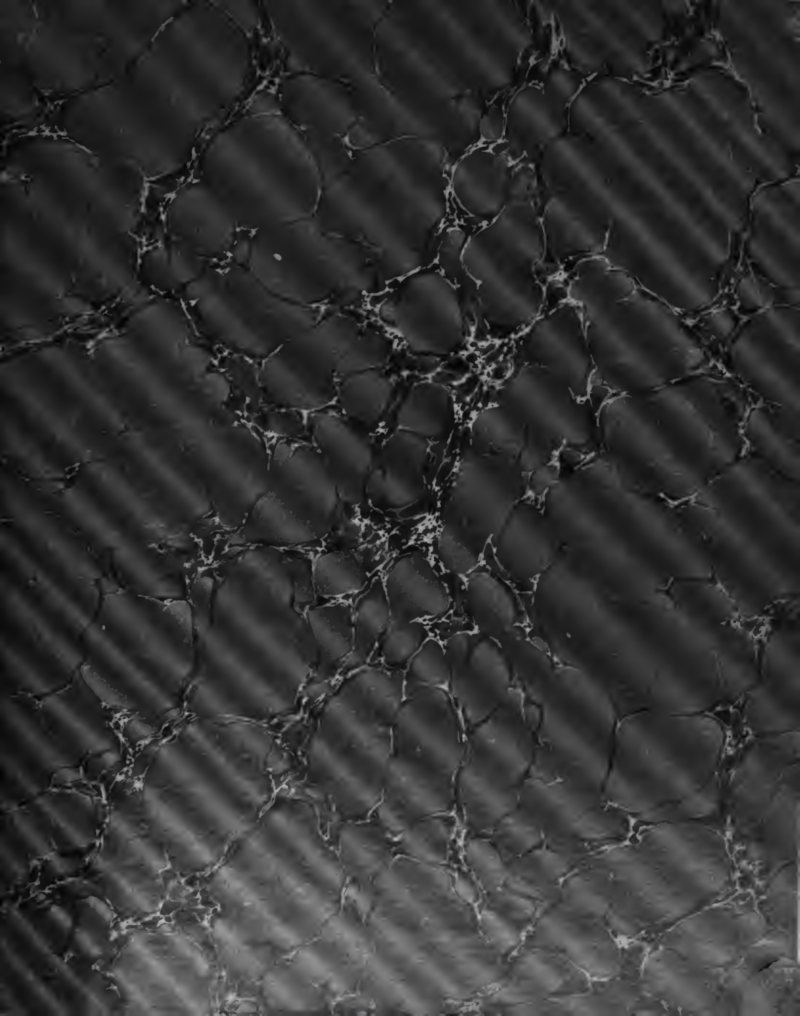


RECHERCHES NOUVELLES

SUR

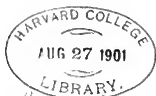
LES NOMBRES PREMIERS,

Par M. A. de Polignac,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Sous-Lieutenant élève d'Artillerie.

PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
de l'École Polytechnique et du Bureau des Longitudes,
Quai des Augustins, 55.

1851.



RECHERCHES NOUVELLES

SUR

LES NOMBRES PREMIERS.

INTRODUCTION.

Avant de commencer cet ouvrage, il paraît convenable d'indiquer en peu de mots ce qui a pu être fait antérieurement sur le même sujet; de cette façon, on verra bien ce qui appartient à chacun.

Ératosthène est le premier qui se soit occupé spécialement des nombres premiers; il imagina pour les trouver une méthode ingénieuse qui s'est transmise jusqu'à nous sous le nom de *crible d'Ératosthène.* C'est cette méthode qui a donné la première idée des recherches qu'on va lire. Il paraissait, en effet, naturel d'étudier les nombres premiers d'après leur mode de formation. On verra cependant que les suites diatomiques diffèrent essentiellement du procédé d'Ératosthène en ce que celui-ci, ne conservant que les nombres premiers, perdait toute trace des places occupées par leurs multiples.

Nicomaque, Boèce, et plus tard un Anglais, Peel, reprirent les recherches d'Ératosthène, mais sans arriver à aucun résultat important.

Legendre, dans un tout autre ordre d'idées, a donné quelque chose qui revient, au fond, aux suites diatomiques; le passage auquel il est fait allusion se trouve dans le chapitre de sa seconde édition de la *Théorie des Nombres* où il cherche à prouver que, dans toute progression arithmétique, il y a une infinité de nombres premiers. Seulement, l'illustre auteur ne

reconnaît pas la périodicité des suites qu'il emploie, ni les grandeurs relatives de leurs termes, ce qui le conduit à des conclusions inexactes.

M. Lejeune-Dirichlet avoue qu'ayant essayé de suivre la marche ouverte par Legendre et qu'il regarde comme fort ingénieuse, il n'a pu aboutir. Ayant pris alors une autre voie, le grand géomètre s'est dédommagé par le nouvel et bel usage qu'il a fait des séries infinies dans la théorie des nombres.

Citons encore Burckardt qui, dans la préface de sa *Table des Nombres premiers,* donne un théorème dû à Hindenburg et qui n'est autre qu'une des propriétés fondamentales des suites diatomiques. L'auteur, toutefois, n'a cherché qu'à faciliter la recherche des nombres premiers sans voir la valeur théorique de sa proposition.

Enfin, M. Tchebychew a dernièrement publié d'intéressants Mémoires sur les nombres premiers. On verra dans le livre II de cet ouvrage des parties qui ont beaucoup de rapports avec les recherches de M. Tchebychew.

Le théorème II du livre II a été démontré par lui, c'est son point de départ.

Il est même juste de remarquer que, dans l'ordre des dates, la priorité lui appartient; car, bien que l'auteur des présentes recherches connût ce théorème, il ne se trouve pas explicitement énoncé dans le compte rendu très-succinct qu'il a eu l'honneur de lire à l'Académie dans la séance du 15 octobre 1849.

Toutefois, son mode de démonstration diffère absolument de celui du savant russe qui, d'ailleurs, ne connaissant pas les suites diatomiques, ne pouvait passer du théorème II aux théorèmes fondamentaux.

La première partie du présent ouvrage ne contiendra que les principes; la seconde partie sera consacrée au développement de ces mêmes principes et à leur application à la théorie des nombres.



PREMIÈRE PARTIE.

LIVRE PREMIER.

CHAPITRE Ier.

DES PROPRIÉTÉS ESSENTIELLES ET ÉLÉMENTAIRES DES SUITES DIATOMIQUES.

I.

Définition des suites diatomiques.

Considérons la suite naturelle des nombres

(a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,....

Si nous rayons tous les nombres de deux en deux à partir de zéro, nous obtiendrons ainsi le tableau (a_1) :

(a_1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,....

Nous aurons toujours un nombre rayé compris entre deux nombres conservés; donc, après cette première opération, les *séquences* de termes rayés se succéderont comme les termes de la suite

(1) 1, 1, 1, 1,...,

que nous appellerons *suite diatomique de* 2 ou *première suite diatomique* [*].

Dans le tableau (a_1), rayons encore les nombres de trois en trois à partir de zéro, nous aurons le nouveau tableau :

(a_2) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17,...,

---

[*] δια τεμνω.

que nous nommerons *suite diatomique de* 3 ou *deuxième suite diatomique,* et dans laquelle les séquences de termes rayés se succèdent comme les termes de la suite périodique

(2) 1, 3, 1, 3, 1, 3,....

Après l'unité, le premier nombre non rayé dans le tableau (a_2) est le nombre 5; rayons les nombres de ce tableau de cinq en cinq à partir de zéro, nous obtiendrons le tableau (a_3) :

(a_3) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37,...,

et les séquences de termes rayés se suivront comme les termes de la suite périodique

(3) 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 3, 5, 1,...,

qui sera la suite diatomique de 5 ou troisième suite diatomique.

La suite diatomique de 7 ou quatrième suite diatomique serait

(4) 1, 9, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 5, 5, 1, 5, 3, 1, 5, 3, 5, 7, 3, 1, 3, 1, 3, 7, 5, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 5, 5, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3, 1, 3, 1, 9; 1, 9, 1, 3, 1, 3, 5, 1, 5, 3,....

Pour généraliser ce qui précède, remarquons d'abord que les seconds nombres non rayés dans les tableaux successifs (a), (a_1), (a_2), (a_3), etc., sont précisément les nombres premiers rangés dans leur ordre naturel, et désignons par P_n le $n^{ième}$ nombre premier; alors, en rayant les nombres du tableau (a) de deux en deux, puis de trois en trois, de cinq en cinq,..., et enfin de P_n en P_n, nous formerons un tableau (a_n) dans lequel les séquences de termes rayés auront respectivement pour valeurs les termes d'une certaine suite que nous appellerons *suite diatomique de* P_n ou $n^{ième}$ *suite diatomique*.

II.

Propriétés fondamentales des suites diatomiques.

Théorème I. — *Toute suite diatomique est périodique, et la période commence avec la suite.*

Admettons que le théorème soit vrai pour la $(n-1)^{ième}$ suite; si celle-ci est périodique, en effaçant dans le tableau (a_{n-1}) les nombres de P_n en P_n pour former le tableau (a_n), on finira nécessairement par trouver deux multiples de P_n déjà effacés et occupant la même *place* dans le tableau (a_{n-1}). Nous appelons *place* d'un nombre dans le tableau (a_{n-1}) sa distance au nombre qui commence la période dans laquelle se trouve le nombre considéré; ainsi, par exemple, 5, 11, 17,..., $5+6n$ occupent la sixième place par rapport au tableau (a_2).

Soient kP_n et $k'P_n$ les nombres trouvés qui occupent la même place dans le tableau (a_{n-1}); alors les séquences ou termes du tableau (a_n), trouvés en allant de kP_n vers $k'P_n$, se répéteront après $k'P_n$ indéfiniment et dans le même ordre par raison de symétrie, et, réciproquement, on trouvera ces mêmes termes dans le même ordre en allant de $k'P_n$ vers kP_n, ou de kP_n vers zéro. Maintenant, on peut supposer que la distance entre $k'P_n$ et kP_n est plus grande qu'entre kP_n et zéro; donc, puisque tous les termes, en allant de kP_n vers zéro, se suivent dans le même ordre qu'en allant de $k'P_n$ vers kP_n, on trouvera entre kP_n et $k'P_n$ un certain multiple de P_n, μP_n qui occupera, par rapport à la période du tableau (a_{n-1}), la même place que zéro. Donc, les termes trouvés en allant de zéro vers μP_n se répéteront indéfiniment et dans le même ordre après μP_n; or la succession de ces termes forme ce que nous appelons la $n^{ième}$ *suite diatomique;* si donc le théorème existe pour la suite $(n-1)$, il existe aussi pour la suite (n). Or le théorème est vrai pour $n=1$; par suite, il est général.

Théorème II. — *Le premier nombre du tableau* (a_n), *après lequel les séquences de termes rayés se reproduisent périodiquement, nombre que*

nous désignons par (μP_n), *est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à* P_n *inclusivement*

En partant du nombre (μP_n) et effaçant les nombres de deux en deux, puis de trois en trois, de cinq en cinq,..., et enfin de P_n en P_n, on effacerait juste les mêmes nombres qu'en partant de zéro et en faisant les mêmes opérations. Donc (μP_n) est égal à $2.3.5\ldots P_n$ ou à un sous-multiple de ce produit; or ce sous-multiple contenant au moins un nombre premier de moins, on ne serait pas dans les mêmes conditions que si l'on partait de zéro; donc

$$(\mu P_n) = 2.3.5\ldots P_n.$$

Théorème III. — *Dans toute suite diatomique la période a pour premier terme l'unité, et, dans la série de tous les autres, les termes également distants des extrêmes sont égaux.*

D'abord le premier terme sera l'unité; car $(\mu P_n) - 1$ et $(\mu P_n) + 1$ ne sont divisibles par aucun des nombres premiers non supérieurs à P_n; donc, après la $n^{ième}$ opération, $(\mu P_n) - 1$ et $(\mu P_n) + 1$ ne seront rayés ni l'un ni l'autre, et (μP_n) sera seul rayé entre eux.

Considérons maintenant, dans le tableau (a_n), deux multiples consécutifs de (μP_n), par exemple μP_n et $2\mu P_n$; il est évident que les termes de la période de la suite (n), qui seront à égale distance de μP_n et de $2\mu P_n$, seront égaux. Le nombre des termes étant impair, il y a toujours un terme milieu.

Théorème IV. — *Les multiples de* P_n *occupent toutes les places par rapport à la période du tableau* (a_{n-1}) *et ne les occupent qu'une seule fois dans chaque période du tableau* (a_n).

Le nombre de places dans la période de la $(n-1)^{ième}$ suite est $\frac{(\mu P_n)}{P_n}$, il faut prouver que les μ places occupées par les multiples de P_n, depuis P_n jusqu'à (μP_n), sont toutes différentes par rapport à la période du tableau (a_{n-1}). Or cela a lieu, sans quoi (μP_n) ne serait pas le premier à partir duquel la période de la $n^{ième}$ suite recommencerait comme à partir de zéro.

THÉORÈME V. — *Si nous désignons par $\varphi(\mu P_n)$ le nombre des termes de la période de la $n^{ième}$ suite diatomique, nous aurons*

$$\varphi(\mu P_n) = (2-1)(3-1)(5-1)\ldots(P_{n-1}-1)(P_n-1).$$

Désignons par K le nombre des termes de la $(n-1)^{ième}$ suite, et supposons que le théorème soit vrai pour cette suite, il sera vrai pour la $n^{ième}$; en effet, le tableau (a_n) contient (P_n) fois le tableau (a_{n-1}), en sorte que si aucune séquence n'avait été réunie à la précédente en rayant le terme qui les sépare, le nombre des termes du tableau (a_n) serait KP_n; mais, d'après le théorème précédent, les multiples de P_n occupent et n'occupent qu'une seule fois toutes les places de la période de (a_{n-1}) dans la première période de (a_n); donc, entre autres, les places non rayées seront occupées. Or ces places sont au nombre de K; donc il faudra, pour avoir le nombre des termes de (a_n), retrancher K de KP_n; on arrive ainsi à $K(P_n-1)$.

On vérifie le théorème pour $n=1$; il est général.

Ce théorème est un cas particulier d'un théorème très-connu; en effet, $\varphi(\mu P_n)$ est le nombre des nombres premiers et inférieurs à (μP_n).

On voit que le nombre des termes augmente très-rapidement :

Pour	$n=1$,	$\varphi(\mu P_n)$	devient	1,
Pour	$n=2$,	$\varphi(\mu P_n)$	devient	2,
Pour	$n=3$,	$\varphi(\mu P_n)$	devient	8,
Pour	$n=4$,	$\varphi(\mu P_n)$	devient	48,
Pour	$n=5$,	$\varphi(\mu P_n)$	devient	480.

THÉORÈME VI. — *Si l'on désigne par S_n la somme des termes de la période de la $n^{ième}$ suite, ou, ce qui revient au même, le nombre des entiers inférieurs à μP_n et divisibles par un ou plusieurs facteurs non supérieurs à P_n, on aura évidemment, d'après les théorèmes précédents,*

$$S_n = (\mu P_n) - \varphi(\mu P_n) = (\mu P_n) - (2-1)(3-1)\ldots(P_n-1).$$

CHAPITRE II.

DE LA SUITE MÉDIANE ET DES SUITES CONSTANTES QUI TENDENT A SE FORMER DANS LES SUITES DIATOMIQUES.

A cause de la symétrie des suites diatomiques, si, au lieu de partir de zéro pour former une période d'une suite diatomique, on part de $\frac{\mu P_n}{2}$, on formera la moitié d'une période en allant jusqu'à μP_n. Désignons par a le nombre $\frac{\mu P_n}{2}$, et considérons la suite des nombres naturels

$$\ldots a-6,\quad a-5,\quad a-4,\quad a-3,\quad a-2,\quad a-1,$$
$$a,\quad a+1,\quad a+2,\quad a+3,\quad a+4,\quad a+5,\quad a+6,\ldots,$$

il est clair, d'abord, que tous les termes de la forme

$$a \pm 2n - 1$$

seront effacés comme nombres pairs, puisque a est impair; maintenant, si l'on efface (en partant de a) de trois en trois, de cinq en cinq, de sept en sept,..., de P_n en P_n, il est clair qu'en prenant n assez grand, on effacera tous les termes de la suite précédente (jusqu'à un terme choisi arbitrairement), excepté les termes de la forme $a \pm 2^n$. On voit donc qu'il tend à se former, au milieu des suites diatomiques, une suite constante que nous appellerons *suite médiane,* et qui n'est autre que la succession des puissances de 2 diminuées d'une unité. On voit, de plus, que la suite médiane s'étend au delà de toute limite. Les termes milieux des suites diatomiques tendent donc vers un état définitif, les puissances de 2 diminuées d'une unité. Ils présentent le tableau suivant :

$$\ldots 255,\ 127,\ 63,\ 31,\ 15,\ 7,\ 3,\ 1,\ \underline{\overline{3}},\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ 127,\ 255,\ldots.$$

En particulier, on remarquera que le terme milieu est toujours 3.

On peut se proposer, étant donnée une suite diatomique, de déterminer le nombre des termes de la suite médiane qui appartiennent à cette suite diatomique. Cette question paraît très-difficile; toutefois, on peut aisément

avoir une limite inférieure du nombre cherché. En effet, ce nombre sera au moins égal à deux fois le nombre des puissances de 2 inférieures à P_n augmenté d'une unité.

Prenons maintenant $\frac{\mu P_n}{3}$, $\frac{\mu P_n}{5}$, ou, en général, $\frac{\mu P_n}{P_k}$, P_k étant au plus égal à P_n, et voyons quels seront les termes des suites diatomiques correspondants aux nombres situés autour de $\frac{\mu P_n}{3}$, $\frac{\mu P_n}{5}$, ..., $\frac{\mu P_n}{P_k}$. Désignons $\frac{\mu P_n}{P_k}$ par a; il y a deux cas particuliers à distinguer :

1°. $$a \pm 1 \equiv 0 \pmod{P_k};$$

alors les termes diatomiques situés autour de a présentent les tableaux suivants (pourvu qu'on prenne P_n assez grand) :

$$\ldots\ P_k^3 - P_k^2 - 1,\quad P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k,\quad P_k - 2,$$
$$P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \ldots$$

pour $a - 1 \equiv 0$, et

$$\ldots\ P_k^3 - P_k^2 - 1,\quad P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k - 2,\quad P_k,$$
$$P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \ldots$$

pour $a + 1 \equiv 0$.

2°. a n'est congru ni avec $+1$ ni avec -1; alors on a le tableau suivant, qui ne diffère des précédents que par les termes du milieu :

$$\ldots\ P_k^3 - P_k^2 - 1,\quad P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k - 2,\quad 1,\quad P_k - 2,$$
$$P_k^2 - P_k - 1,\quad P_k^3 - P_k^2 - 1, \ldots.$$

Dans le cas de $\frac{\mu P_n}{3} = a$, comme $a - 1$ ou $a + 1$ est l'un ou l'autre congru avec 3, les deux premières valeurs des suites constantes se présenteront seules; pour $\frac{\mu P_n}{P_k}$, P_k étant supérieur à 3, il pourra se présenter les deux cas signalés plus haut.

Considérons maintenant le nombre $\frac{\mu P_n}{2.3}$; nous trouverons qu'à partir de

ce terme, il se forme à droite et à gauche une suite qui n'est pas symétrique et dont le terme milieu est 5. Désignons $\frac{\mu P_n}{2.3}$ par b et prenons la suite des nombres naturels

$$\ldots\ b-3,\quad b-2,\quad b-1,\quad b,\quad b+1,\quad b+2,\quad b+3,\ldots;$$

tous les nombres de la forme

$$b+2n+1$$

seront effacés comme nombres pairs. Maintenant il y a deux hypothèses à faire :

1°. $$b-1\equiv 0 \pmod{3}.$$

Dans ce cas, en effaçant de trois en trois à partir de $b-1$, puis de cinq en cinq, de sept en sept,..., de P_n en P_n à partir de b, on voit que, dans la portion de droite, tous les nombres seront effacés, excepté ceux de la forme

$$b+2^{2n}$$

ou de la forme

$$b+2^{\alpha}.3^{\beta},$$

et, dans la portion de gauche, il n'y aura de conservés que les nombres de la forme

$$b-2^{2n+1}\quad \text{ou}\quad b-2^{\alpha}.3^{\beta}.$$

En sorte que les termes de la suite considérée sont, pour la partie droite,

$$2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1,\quad \text{ou}\quad 2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{2n}-1,\quad \text{ou}\quad 2^{2n}-2^{\alpha}.3^{\beta}-1,$$

et, pour la partie gauche,

$$2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{\alpha'}.3^{\beta'}-1,\quad 2^{\alpha}.3^{\beta}-2^{2n+1}-1,$$

ou

$$2^{2n+1}-2^{\alpha}.3^{\beta}-1.$$

On peut réunir ces différentes formes dans une seule formule, sauf à la discuter dans les deux cas où l'on prendrait la portion de droite ou la portion

de gauche de la série ; cette formule est

$$2^{\alpha}.3^{\beta}(\pm 2^{\alpha'-\alpha}.3^{\beta'-\beta}\mp 1)-1.$$

Si l'on se donne α et β, α' et β' sont déterminés. Supposons d'abord que β ne soit pas nul ; alors, si la valeur de β' n'est pas nulle non plus, le terme trouvé pour la portion de droite se trouvera aussi dans la portion de gauche de la série. Admettons encore que $\beta > 0$; alors, si $\beta' = 0$, la formule pour représenter un terme de droite devra être telle que

$$\alpha' = 2k,$$

et, pour un terme de gauche,

$$\alpha' = 2k' + 1.$$

Enfin, si $\beta = 0$, pour un terme de droite, on aura

$$\alpha = 2k,$$

et, pour un terme de gauche,

$$\alpha = 2k + 1.$$

β et β' ne peuvent être nuls à la fois ; quant aux exposants α et α', aucun d'eux ne peut être nul.

2°. $$(b+1) \equiv 0 \pmod{3}.$$

Il est aisé de voir, dans ce cas, que la partie gauche devient la partie droite, et *vice versâ;* c'est là le seul changement qui ait lieu.

La suite qui se forme autour de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ ne change pas indéfiniment avec P_n ; comme la suite médiane, elle tend vers un état constant, seulement elle peut changer de sens, c'est-à-dire que les termes qui se trouvaient à gauche de $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peuvent se trouver à droite de $\frac{\mu P_{n'}}{2.3}$, et *vice versâ;* ainsi la suite est constante par rapport à la valeur des termes, et elle n'admet que deux états en considérant leur disposition. Dans tous les cas, l'inspection seule de la forme de $\frac{\mu P_n}{2.3}$, par rapport à 3, suffira pour marquer si l'on a un de ces états ou l'autre.

Nous nous sommes un peu étendu sur cet exemple pour donner une idée de ces sortes de considérations.

Ce qu'on a dit pour $\frac{\mu P_n}{2.3}$ peut se répéter pour $\frac{\mu P_n}{P_i P_{i'}}$, et l'on arrive à des conclusions analogues que notre cadre ne nous permet pas de développer; nous reviendrons là-dessus dans la seconde partie de cet ouvrage, où nous examinerons plus généralement ce qui se passe autour d'un nombre $\frac{\mu P_n}{P_i P_{i'} P_{i''} \ldots}$, par rapport aux termes diatomiques.

Il nous a suffi d'indiquer l'existence de ces suites constantes qui tendent à se former dans les suites diatomiques et nous permettent de trouver des groupes de termes connus, sans qu'il soit besoin de former les suites diatomiques elles-mêmes.

LIVRE SECOND.

CHAPITRE I[er].

DE DEUX FORMES SIMPLES SOUS LESQUELLES ON PEUT METTRE LES PRODUITS F OU Γ.

Désignons le produit de tous les nombres jusqu'à un nombre donné x par $F(x)$; on aura

$$F(x) = \Gamma(x+1),$$

Γ ayant la signification qu'on lui donne dans la théorie des fonctions eulériennes. Ce produit peut s'exprimer en fonction seulement des nombres premiers qui y entrent; on a donc nécessairement

$$F(x) = 2^{\alpha} . 3^{\beta} . 5^{\gamma} \ldots P_n^{\omega}.$$

Quant aux exposants, il est aisé de voir qu'on a

$$\alpha = \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{4}\right) + \left(\frac{x}{8}\right) + \ldots,$$

$$\beta = \left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{9}\right) + \left(\frac{x}{27}\right) + \ldots,$$

$$\gamma = \left(\frac{x}{5}\right) + \left(\frac{x}{25}\right) + \left(\frac{x}{125}\right) + \ldots,$$

. . . .

$$\omega = \left(\frac{x}{P_n}\right) + \left(\frac{x}{P_n^2}\right) + \left(\frac{x}{P_n^3}\right) + \ldots;$$

les quantités entre parenthèses ne désignent pas des quotients exacts, mais les parties entières des divisions par défaut. $F(x)$ est donc un produit dont tous les facteurs sont de la forme

$$P_k^{\Sigma\left(\frac{x}{P_k^g}\right)},$$

g recevant toutes les valeurs 1, 2, 3, 4,... jusqu'à ce qu'on arrive à $P_k^g > x$. On aura donc l'égalité

$$(1) \qquad F(x) = \Pi P_k^{\Sigma\left(\frac{x}{P_k^g}\right)},$$

P_k désignant un nombre premier quelconque jusqu'à P_n qui, par hypothèse, est le plus grand nombre premier inférieur à x.

La démonstration de ce théorème presque évident se trouve dans Legendre (*Théorie des nombres*).

Après avoir donné ce théorème, qui pourra nous être utile dans la suite, nous allons nous proposer d'exprimer les fonctions μ au moyen des fonctions F.

On a vu, en effet, dans le livre Ier, que les fonctions μ jouaient un grand rôle dans la théorie des suites diatomiques; d'autre part, elles ont été jusqu'à ce jour peu étudiées, tandis que les fonctions F sont bien connues des géomètres. Il paraît donc très-important de transformer les unes dans les autres.

Or il serait peut-être difficile d'exprimer immédiatement μ en fonction de F, c'est pourquoi nous commencerons par l'inverse. On va voir qu'on y arrive aisément.

Et d'abord, la chose est possible, car un nombre premier quelconque entre dans F (x) au moins autant de fois qu'un nombre premier inférieur; F (x) est donc de la forme

$$\Pi\mu(y),$$

$\mu(y)$ désignant le produit de tous les nombres premiers consécutifs jusqu'à celui qui est immédiatement inférieur à la partie entière de y.

Voyons maintenant la forme de

$$\Pi\mu(y).$$

Considérons un nombre premier quelconque P_k; si l'on a

$$P_k < x, \quad P_k < \frac{x}{2}, \ldots, \quad P_k < \frac{x}{g}, \quad P_k > \frac{x}{g+1},$$

alors on voit que

$$\mu(x)\,.\,\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\mu\left(\frac{x}{3}\right)\cdots\mu\left(\frac{x}{g}\right)$$

entrera comme facteur dans le second membre; mais P_k, et par suite μ, entrera encore un plus grand nombre de fois si l'on a

$$P_k < x^{\frac{1}{2}}, \quad P_k < x^{\frac{1}{3}}, \ldots, \quad P_k < x^{\frac{1}{\gamma}}, \quad P_k > x^{\frac{1}{\gamma+1}},$$

$$P_k < \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad P_k < \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots, \quad P_k < \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad P_k > \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}},$$

$$P_k < \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad P_k < \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \ldots, \quad P_k < \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad P_k > \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{\gamma+1}},$$

. . . .

On voit que le second facteur sera alors composé comme il suit :

$$\mu(x)\,.\,\mu\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\mu\left(\frac{x}{3}\right)\cdots \times \mu(x)^{\frac{1}{2}}\,.\,\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\,.\,\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdots$$

$$\times\, \mu(x)^{\frac{1}{3}}\,.\,\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\,.\,\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots,$$

ou, en abrégeant les notations,

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{7}\right)\times\Pi\mu\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{2}}\times\Pi\mu\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{3}}\cdots$$

Nous pouvons encore écrire ce produit sous la forme suivante, c'est celle qui va nous servir :

$$\Pi\mu(x)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{g}}\cdots;$$

donc

(2) $$F(x)=\Pi\mu(x)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{g}}\cdots$$

Nous n'insisterons pas davantage sur la démonstration de ce théorème, que M. Bertrand a mis, d'ailleurs, dans la seconde édition de son *Arithmétique*, sans toutefois en indiquer la source.

Nous appellerons la fonction

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{g}}$$

un produit élémentaire de l'ordre $\frac{1}{7}$; $\mu\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{g}}$ désignant le produit de tous les nombres premiers consécutifs jusqu'à celui qui est immédiatement inférieur à la partie entière de $\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{g}}$. Ainsi nous voyons que la formule (2) permet d'exprimer un produit élémentaire au moyen de F et de produits élémentaires inférieurs. En appliquant à ces derniers la formule (2) et continuant ainsi, on finira nécessairement par se débarrasser des produits élémentaires dans le second membre, et l'on obtiendra

$$\Pi\mu(x)^{\frac{1}{g}}=\varphi_F;$$

en exprimant par φ_F une fonction où il n'entre que des produits F.

CHAPITRE II.

FORMULE FONDAMENTALE AU MOYEN DE LAQUELLE ON EXPRIME UN PRODUIT ÉLÉMENTAIRE PAR DES FONCTIONS F.

Nous nous proposons de trouver la forme de φ_F; de la formule (2) on tire

$$\Pi\mu(x)^{\frac{1}{g}} = \frac{F(x)}{\Pi\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{g}}\cdots}.$$

On a de même, par conséquent, en posant $\frac{x}{2} = y$,

$$\Pi\mu(y)^{\frac{1}{g}} = \frac{F(y)}{\Pi\mu\left(\frac{y}{2}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{1}{g}}\cdots},$$

ce qui peut s'écrire

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{g}} = \frac{F\left(\frac{x}{2}\right)}{\Pi\mu\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{g}}\cdots},$$

car les parties entières de $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{6}, \ldots$ sont les mêmes que celles de $y, \frac{y}{2}, \frac{y}{3}, \ldots$. Remplaçant

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{g}}$$

par sa valeur dans la formule (2), il vient

$$(3)\qquad \Pi\mu(x)^{\frac{1}{g}} = \frac{F(x)}{F\left(\frac{x}{2}\right).\Pi\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}}.\Pi\mu\left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{g}}\cdots}.$$

On voit que dans le dénominateur de l'équation (3), les produits élémen-

taires ont disparu de deux en deux; si nous remplaçons

$$\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}}$$

par sa valeur, ils disparaîtront de trois en trois..., et ainsi de suite; le dénominateur sera *diatomisé*, si l'on peut s'exprimer ainsi. Mais les termes amenés par

$$\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}}$$

resteront, et les produits élémentaires ne seront pas tous réduits par les termes du dénominateur; la formule (3) prendra donc la forme

$$\Pi\,\mu\,(x)^{\frac{1}{g}} = \frac{\mathrm{F}\,(x).\mathrm{G}}{\Pi\,\mathrm{F}\left(\frac{x}{\mathrm{P}_\iota}\right)}.$$

Voyons comment G est composé. Nous allons démontrer qu'on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{G} = \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.3}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0 \times \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.5}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0 \times \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.7}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0 \times \ldots \\ \times \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3.5}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_1 \times \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3.7}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_1 \times \ldots \\ \times \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{5.7}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_2 \times \ldots . \end{aligned}\right.$$

Nous désignons, en général, par

$$\left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{\mathrm{P}_\iota\,\mathrm{P}_{\iota'}}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_\theta$$

un produit de la forme suivante:

$$\Pi\,\mu\left(\frac{x}{\mathrm{P}_\iota\,\mathrm{P}_{\iota'}}\right)^{\frac{1}{g}} \times \Pi\,\mu\left(\frac{x}{\mathrm{P}_\iota\,\mathrm{P}_{\iota'}.\,u_1}\right)^{\frac{1}{g}} \times \Pi\,\mu\left(\frac{x}{\mathrm{P}_\iota\,\mathrm{P}_{\iota'}.\,u_2}\right)^{\frac{1}{g}} \times \Pi\,\mu\left(\frac{x}{\mathrm{P}_\iota\,\mathrm{P}_{\iota'}.\,u_3}\right)^{\frac{1}{g}} \times \ldots,$$

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ n'étant autres que les différents termes d'une suite dont les premières différences sont les termes de la $\theta^{ième}$ suite diatomique augmentés chacun d'une unité; il est clair d'ailleurs que u_1 est égal non pas au

premier, mais au second terme de la suite diatomique, augmenté d'une unité.

Prenons, par exemple,

$$\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}},$$

et remplaçons-le par sa valeur; tous les produits élémentaires de rang multiple de 3 et impairs seront réduits par ceux du dénominateur, mais il montera au numérateur un produit de la forme

$$\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.3}\right)^{\frac{1}{g}} \times \Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.3.2}\right)^{\frac{1}{g}} \times \Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.3.3}\right)^{\frac{1}{g}} \ldots,$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.3}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0,$$

ou bien encore

$$F\left(\frac{x}{2.3}\right).$$

Voyons maintenant quels sont les termes amenés par

$$\Pi\,\mu\left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{g}}.$$

Tous les produits élémentaires de rang multiple de 5 et non divisible par 3 ou par 2 seront réduits par ceux du dénominateur, mais tous les produits élémentaires dans le rang desquels se trouve le facteur 2 ou le facteur 3 resteront au numérateur; on aura donc dans G le nouveau facteur suivant :

$$\left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.5}\right)^{\frac{1}{g}} . \Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.5.2}\right)^{\frac{1}{g}} \ldots\right)\left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3.5}\right)^{\frac{1}{g}} . \Pi\,\mu\left(\frac{x}{3.5.3}\right) \ldots\right).$$

Dans la première parenthèse n'entrent que des produits élémentaires dont les rangs sont multiples de 2; dans la seconde parenthèse n'entrent que des produits élémentaires de rang multiple de 3. Le nouveau facteur pourra donc s'écrire, d'après nos notations,

$$\left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{2.5}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0 \times \left(\Pi\,\mu\left(\frac{x}{3.5}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_1;$$

pour

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{g}},$$

il serait aisé de voir qu'on introduirait le facteur

$$\left(\Pi\mu\left(\frac{x}{2.7}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0 \times \left(\Pi\mu\left(\frac{x}{3.7}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_1 \times \left(\Pi\mu\left(\frac{x}{5.7}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_2.$$

Le raisonnement étant exactement le même que ci-dessus, nous ne le répéterons pas; en général, le produit élémentaire

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{P_i}\right)^{\frac{1}{g}}$$

étant remplacé par sa valeur, introduira au numérateur le facteur

$$\left(\Pi\mu\left(\frac{x}{2.P_i}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0 \times \left(\Pi\mu\left(\frac{x}{3.P_i}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_1 \times \left(\Pi\mu\left(\frac{x}{5.P_i}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_2 \times \cdots$$
$$\times \left(\Pi\mu\left(\frac{x}{P_{i-1}.P_i}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_{i-2};$$

G se trouvera donc bien être de la forme annoncée. On pourrait écrire, pour abréger,

$$G = \Pi\left(\Pi\left(\Pi\mu\left(\frac{x}{P_i.P_{i'}}\right)^{\frac{1}{g}}\right)_0\right)^{-1} \times \Pi F\left(\frac{x}{P_i.P_{i'}}\right).$$

On voit déjà comment des suites diatomiques se trouvent au fond de toute cette théorie et permettent de donner de la généralité à des choses qui, au premier abord, pouvaient n'en pas paraître susceptibles.

Ce n'est pas que nous veuillons dire qu'on ne puisse arriver autrement à toutes ces conclusions; seulement, la voie que nous suivons paraît être la plus logique, si ce n'est la plus simple.

Elle ne laisse jamais perdre de vue les principes qui, selon nous, doivent guider dans ces recherches.

Si nous remplaçons dans G les termes de la forme

$$\Pi\mu\left(\frac{x}{P_i.P_{i'}}\right)^{\frac{1}{g}}$$

par leurs valeurs au moyen de l'expression (2), tous les produits élémentaires disparaîtront au numérateur, et nous obtiendrons la seconde formule dérivée

$$\Pi \mu (x)^{\frac{1}{g}} = \frac{F(x) . \Pi F\left(\frac{x}{P_k . P_{k'}}\right)}{\Pi F\left(\frac{x}{P_k}\right) . G'},$$

et nous aurons

$$G' = \Pi \left(\Pi \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{P_\theta . P_k . P_{k'}} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_{\theta - 1} \right)^{-1} \times \Pi F \left(\frac{x}{P_k . P_{k'} . P_{k''}} \right),$$

dans laquelle θ, k et k' reçoivent toutes les valeurs entières et positives jusqu'à une certaine limite, avec cette condition qu'on ait

$$\theta < k', \quad \theta < k.$$

On pourrait mettre G sous une forme analogue en groupant autrement les facteurs ; on pourra donc écrire

$$G = \Pi \left(\Pi \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{P_\theta . P_k} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_{\theta - 1} \right)^{-1} \times \Pi F \left(\frac{x}{P_k . P_{k'}} \right).$$

Quant à la démonstration de ces deux formes, elle se fera exactement par les mêmes considérations que celles qui nous ont mené à la première forme sous laquelle nous avons mis G en faisant dans la formule (4) le produit des facteurs par bandes verticales.

Toutefois, pour qu'il ne reste aucun doute dans l'esprit du lecteur, nous donnons ci-dessous la valeur développée de G′ dont il pourra aisément vérifier l'exactitude,

$$\begin{aligned} G' = & \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{2.3.5} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_0 \times \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{2.3.7} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_0 \times \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{2.5.7} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_0 \cdots \\ & \times \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{3.5.7} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_1 \times \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{3.5.11} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_1 \cdots \\ & \times \left[\Pi \mu \left(\frac{x}{5.7.11} \right)^{\frac{1}{g}} \right]_2 \cdots ; \end{aligned}$$

en généralisant, on a

$$G^{(n)} = \Pi\left(\Pi\left[\Pi\,\mu\left(\frac{x}{\varpi(P_\theta)_{n+1}}\right)^{\frac{1}{g}}\right]_{\theta-1}\right)^{-1} \times \Pi\,F\left(\frac{x}{\varpi(P_i)_{n+2}}\right),$$

en désignant par $\varpi(P_\theta)_{n+2}$ le produit des nombres premiers $n+2$ à $n+2$, et θ étant le rang du plus petit nombre premier qui figure dans chacun des produits partiels. On voit donc, par la forme même de $G^{(n)}$, qu'en prenant n assez grand, on finira nécessairement par arriver à

$$G^{(n)} \leqq 1.$$

A ce moment toutes les fonctions μ auront disparu dans le second membre, et l'on aura

$$\Pi\,\mu(x)^{\frac{1}{g}} = \varphi_F = \frac{F(x) \times \Pi F\left(\frac{x}{P_i P_{i'}}\right) \times \ldots}{\Pi F\left(\frac{x}{P_i}\right) \times \Pi F\left(\frac{x}{P_i P_{i'} P_{i''}}\right) \times \ldots};$$

ce qu'on peut écrire, en abrégé, de la manière suivante :

$$(5) \qquad \Pi\,\mu(x)^{\frac{1}{g}} = \varphi_F = \frac{\Pi\left(\Pi F\left(\frac{x}{\varpi(P_i)_{2n}}\right)\right)}{\Pi\left(\Pi F\left(\frac{x}{\varpi(P_i)_{2n+1}}\right)\right)}.$$

Telle est notre première formule fondamentale; on voit que sa démonstration, quoique longue, est fort simple.

On peut se demander de tirer la formule (2) de la formule fondamentale; cela peut se faire, et l'on aura ainsi une vérification de la formule fondamentale: nous nous occuperons de cette question dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

FORMULE FONDAMENTALE AU MOYEN DE LAQUELLE ON EXPRIME UNE FONCTION u PAR DES FONCTIONS z.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'on avait

$$\Pi\,u(x)^{\frac{1}{s}} = \frac{\Pi\left(\Pi F\left(\frac{x}{\sigma(P_i)_{2n}}\right)\right)}{\Pi\left(\Pi F\left(\frac{x}{\sigma(P_i)_{2n+1}}\right)\right)}.$$

Désignons le second membre par $z(x)$, nous aurons

$$\Pi\,u(x)^{\frac{1}{s}} = z(x),$$

ou développant,

$$(6) \qquad u(x)\,.\,u(x)^{\frac{1}{2}}\,.\,u(x)^{\frac{1}{3}}\ldots = z(x);$$

d'où l'on tire

$$u(x) = \frac{z(x)}{u(x)^{\frac{1}{2}}\,.\,u(x)^{\frac{1}{3}}\,.\,u(x)^{\frac{1}{4}}\ldots}.$$

On a donc exprimé une fonction u au moyen de z et de fonctions u d'ordre inférieur; en appliquant successivement cette formule à

$$u(x)^{\frac{1}{2}}, \qquad u(x)^{\frac{1}{3}}, \ldots.$$

on finira par n'avoir dans le second membre que des fonctions z.

Pour faire ces substitutions, nous remarquerons que la formule (6) est de même forme que la formule (2), et qu'on peut passer de l'une à l'autre en remplaçant z par F, les produits élémentaires par des fonctions u, et changeant les multiplicateurs de x en exposants. Dans la formule (2), le rang des termes du dénominateur était indiqué par les diviseurs de x; dans la formule (6), ce rang sera marqué par les dénominateurs de l'exposant; or ces nombres sont les mêmes de part et d'autre

On aura donc les mêmes réductions, et l'on arrivera à

$$\mu(x) = \frac{\varphi(x) . \Pi \varphi(x)^{\frac{1}{P_k . P_{k'}}} . \Pi \varphi(x)^{\frac{1}{P_k . P_{k'} . P_{k''} . P_{k'''}}} \cdots}{\Pi \varphi(x)^{\frac{1}{P_k}} . \Pi \varphi(x)^{\frac{1}{P_k . P_{k'} . P_{k''}}} \cdots},$$

ce qui, d'après nos notations abrégées, peut s'écrire

(7) $$\mu(x) = \frac{\Pi\left(\Pi \varphi\left((x)^{\frac{1}{\varpi(P_k)_{2n}}}\right)\right)}{\Pi\left(\Pi \varphi\left((x)^{\frac{1}{\varpi(P_k)_{2n+1}}}\right)\right)}.$$

Le problème qu'on se proposait est donc complétement résolu ; μ est exprimé au moyen des fonctions F seulement.

Nous allons déduire la formule (5) de la formule (7) ; prenons les logarithmes des deux membres de cette dernière et développons, il vient

$$\log \mu(x) = \log \varphi(x) - \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{P_k}} + \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{P_k P_{k'}}} \ldots;$$

nous aurons de même

$$\log \mu(x)^{\frac{1}{2}} = \log \varphi(x)^{\frac{1}{2}} - \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{2 . P_k}} + \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{2 . P_k . P_{k'}}} - \ldots,$$

$$\log \mu(x)^{\frac{1}{3}} = \log \varphi(x)^{\frac{1}{3}} - \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{3 . P_k}} + \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{3 . P_k . P_{k'}}} - \ldots.$$

$$\log \mu(x)^{\frac{1}{4}} = \log \varphi(x)^{\frac{1}{4}} - \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{4 . P_k}} + \Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{4 . P_k . P_{k'}}} - \ldots.$$

. . . .

En ajoutant ces inégalités, nous aurons dans le premier membre

$$\Sigma \log \mu(x)^{\frac{1}{g}} = \log \Pi \mu(x)^{\frac{1}{g}};$$

il faudra donc que le second membre se réduise à

$$\log \varphi(x),$$

ce qui exige que tous les autres termes se détruisent.

Pour cela, il suffit de démontrer qu'un terme quelconque entre dans le second membre autant de fois avec le signe + qu'avec le signe —.

Prenons, par exemple, le terme

$$\log \varphi(x)^{\frac{1}{3.5.11}}.$$

Ce terme se trouve dans la première égalité avec le signe —, puisqu'il est de rang pair; dans la troisième, la cinquième et la onzième égalité, avec le signe +, parce qu'ici ces rangs sont impairs; dans la $(3.5)^{ième}$, $(3.11)^{ième}$, $(5.11)^{ième}$, avec le signe —, puisque ces rangs sont pairs; enfin, dans la $(3.5.11)^{ième}$ avec le signe +, puisque son rang est impair. On voit donc que le coefficient de ce terme est

$$-1+3-3+1=(1-1)^3=0.$$

En général, un terme quelconque du groupe

$$\Sigma \log \varphi(x)^{\frac{1}{\varpi(p_k)_n}}$$

aura pour coefficient

$$(1-1)^n=0.$$

Tous les termes de second membre de la première égalité disparaitront donc, excepté $\log \varphi(x)$.

Les seconds membres des autres égalités contiendront encore des termes de la forme

$$\log \varphi(x)^{\frac{1}{p_k^g}},$$

ou de la forme

$$\log \varphi(x)^{\frac{1}{p_k^g . p_{k'}^{g'} \ldots p_i . p_{i'} . p_{i''}}},$$

où différents nombres peuvent entrer dans l'exposant à des puissances supérieures à l'unité. Par un raisonnement analogue à celui qu'on vient de faire, on s'assurera que ces termes disparaissent aussi. On retrouve donc bien

$$\log \Pi u(x)^{\frac{1}{g}} = \log \varphi(x) \quad \text{ou} \quad \Pi u(x)^{\frac{1}{g}} = \varphi(x).$$

De la formule (5) on peut de même passer à la formule (2). En effet, écrivons

$$\log \Pi \mu (x)^{\frac{1}{g}} = \log F(x) - \Sigma \log F\left(\frac{x}{P_i}\right) + \Sigma \log F\left(\frac{x}{P_i . P_{i'}}\right) - \ldots,$$

$$\log \Pi \mu \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{g}} = \log F\left(\frac{x}{2}\right) - \Sigma \log F\left(\frac{x}{2.P_i}\right) + \Sigma \log F\left(\frac{x}{2.P_i . P_{i'}}\right) - \ldots,$$

$$\log \Pi \mu \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{g}} = \log F\left(\frac{x}{3}\right) - \Sigma \log F\left(\frac{x}{3.P_i}\right) + \Sigma \log F\left(\frac{x}{3.P_i . P_{i'}}\right) - \ldots,$$

$$\log \Pi \mu \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{g}} = \log F\left(\frac{x}{4}\right) - \Sigma \log F\left(\frac{x}{4.P_i}\right) + \Sigma \log F\left(\frac{x}{4.P_i . P_{i'}}\right) - \ldots,$$

. . . .

En ajoutant ces égalités membre à membre, on obtient

$$\log \Pi \left(\Pi \mu \left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{g}}\right) = \log F(x),$$

d'où

$$\Pi \left(\Pi \mu \left(\frac{x}{7}\right)^{\frac{1}{g}}\right) = F(x).$$

Nous allons maintenant dire deux mots sur la nature intime du second membre de l'expression (7).

Si dans cette fonction on fait varier x en lui donnant des valeurs entières consécutives, la fonction ne changera que lorsque x sera égal à un nombre premier; en effet, il est évident que le premier membre ne change que dans ce cas.

Dans la formule (7), rien ne suppose que x soit entier; nous pouvons donc faire varier x par degrés continus, et la formule (7) ne cessera point d'être vraie.

Désignons le second membre de la formule (7) par $\psi(x)$; $\psi(x)$ sera une fonction discontinue de la variable continue x, et ne changera de valeur que lorsque x prendra des valeurs entières et premières.

Quant à la fonction $\varphi(x)$, elle ne changera de valeur que lorsque x sera premier ou puissance exacte d'un nombre premier.

Il n'est pas difficile de vérifier directement l'exactitude des deux expressions (5) et (7). Ne considérons que la première et distinguons trois cas :

1°. x est premier; alors, en passant de $x-1$ à x, aucun des termes du second membre ne change, excepté

$$F(x-1),$$

qui devient

$$F(x) = xF(x-1).$$

Mais le premier membre est aussi multiplié par x; donc, si l'égalité avait lieu pour $x-1$, elle subsiste pour x.

2°. x est une puissance d'un nombre premier; alors, en passant de $x-1$ à x, on multiplie le premier membre par la racine de x. Il faut démontrer qu'il en sera de même pour le second. Or, au numérateur, rien ne change, si ce n'est

$$F(x-1),$$

qui devient

$$F(x) = xF(x-1);$$

au dénominateur, le seul terme qui soit altéré est

$$F\left(\frac{x}{y}\right).$$

En désignant par y le nombre premier racine de x, on a donc

$$F\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} F\left(\frac{x-1}{y}\right);$$

par suite,

$$\varphi(x) = y \,.\, \varphi(x-1).$$

3°. x est un nombre quelconque; nous nous bornerons au cas où les nombres premiers facteurs de x n'entrent qu'à la première puissance : le lecteur pourra aisément compléter cette vérification.

Supposons que x soit le produit de 4 nombres premiers; par exemple,

$$x = 2.3.5.7.$$

Nous allons voir qu'en passant de $x-1$ à x, nous introduirons chacun des nombres premiers de x autant de fois au numérateur qu'au dénominateur. Prenons le nombre premier 3 au numérateur; nous aurons

$$F(x) = 3.(2.5.7.F(x-1)),$$
$$F\left(\frac{x}{2.5}\right) = 3.\left(7.F\left(\frac{x-1}{2.5}\right)\right),$$
$$F\left(\frac{x}{2.7}\right) = 3.\left(5.F\left(\frac{x-1}{2.7}\right)\right),$$
$$F\left(\frac{x}{5.7}\right) = 3.\left(2.F\left(\frac{x-1}{5.7}\right)\right).$$

Les autres termes ne changeront pas par rapport à 3 : le numérateur sera donc multiplié par 3^{1+3}, et, de même, par 2^{1+3}, 5^{1+3}, 7^{1+3}.

Quant au dénominateur,

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = 3.\left(5.7.F\left(\frac{x-1}{2}\right)\right),$$
$$F\left(\frac{x}{5}\right) = 3.\left(2.7.F\left(\frac{x-1}{5}\right)\right),$$
$$F\left(\frac{x}{7}\right) = 3.\left(2.5.F\left(\frac{x-1}{7}\right)\right),$$
$$F\left(\frac{x}{2.5.7}\right) = 3.F\left(\frac{x-1}{2.5.7}\right).$$

Les autres termes ne changeront pas par rapport à 3; donc le dénominateur sera multiplié par 3^{3+1}, et, de même, par 2^{3+1}, 5^{3+1}, 7^{3+1}.

Si x était un produit de n facteurs premiers, un de ces facteurs P_k s'introduirait au numérateur avec l'exposant

$$1 + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} + \ldots,$$

et au dénominateur avec l'exposant égal

$$n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots.$$

Par conséquent, chacun des facteurs de x entrant un même nombre de

fois au numérateur et au dénominateur, rien ne changera, et l'on aura

$$\varphi(x-1)=\varphi(x).$$

La formule (7) se vérifierait d'une manière tout analogue.

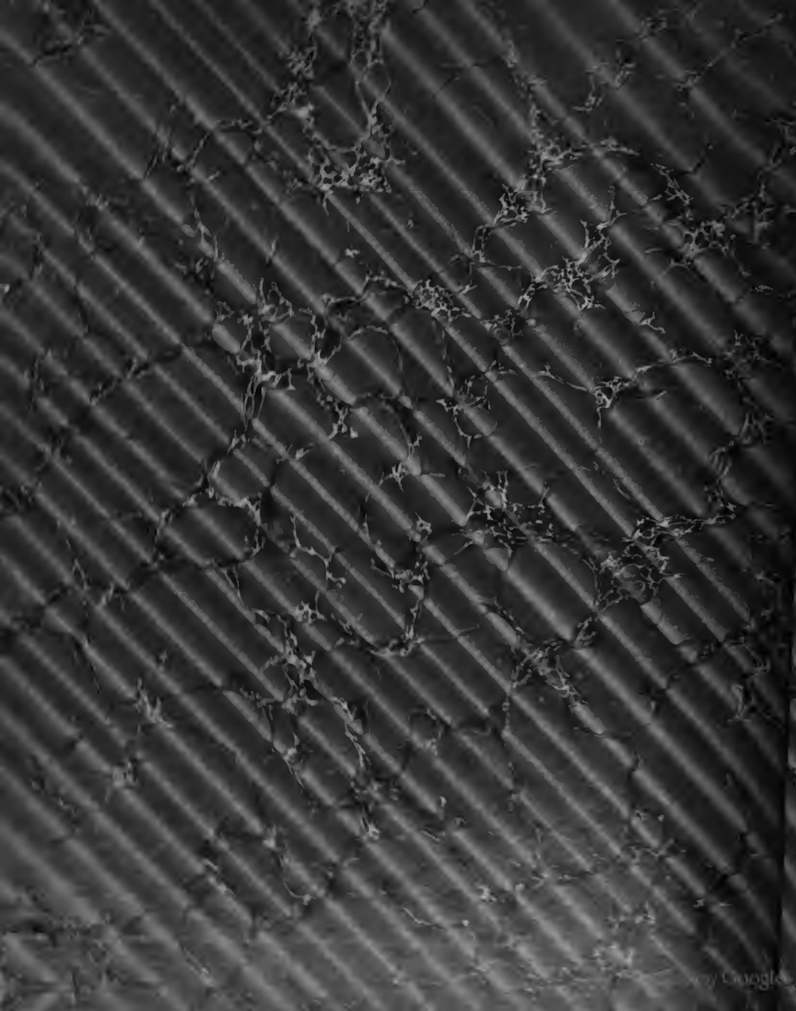
On voit que nos formules fondamentales peuvent se démontrer très-simplement à posteriori.

Néanmoins, le long raisonnement par lequel nous sommes arrivé à les établir directement, ne doit pas pour cela perdre de son importance. Outre sa valeur comme méthode d'investigation, il nous montre que la formule

$$\psi(x)=\mu(x)$$

est sans doute *la plus simple* qu'on puisse trouver pour exprimer μ en fonction de F.

PARIS. — IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.




JAN 17

